

Глава 4. Нормированные пространства. Функции от матриц

§1. Корневые многочлены. Степени и разложения или операторов

Пусть λ -собственные и оператор A . Вектор $x \in V$ называется корневой вектором, если $(A - \lambda E)^k x = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Ор. Векторы корневых векторов и их линейные комбинации $k : (A - \lambda E)^k x = 0$.

Доказательство:

1) Корневые векторы x - собственные векторы, т.е. $Ax = \lambda x$.
 2) Если x -корневой вектор $(A - \lambda E)^k x = 0$, то $(A - \lambda E)x$ - корневой вектор $(A - \lambda E)^{k-1} x = 0$.

$$y = (A - \lambda E)^{k-1} x \Rightarrow (A - \lambda E)^k y = (A - \lambda E)^{2k-1} x = 0$$

3) Если x -корневой вектор $(A - \lambda E)^k x = 0$, то вектор x , $(A - \lambda E)x, \dots, (A - \lambda E)^{k-1}x$ - линейно независимые векторы $\dim V$.

Проверим, что эти векторы линейно независимы:

$$\text{Пусть } \alpha_1 x + \alpha_2 (A - \lambda E)x + \dots + \alpha_k (A - \lambda E)^{k-1} x = 0$$

Применим оператор $(A - \lambda E)^{k-1}$:

$$\alpha_1 (A - \lambda E)^{k-1} x + \alpha_2 (A - \lambda E)^k x + \dots + \alpha_k (A - \lambda E)^{2k-2} x = 0$$

$$\text{Итак получаем: } \alpha_1 (A - \lambda E)^{k-1} x = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \text{ т.к. } (A - \lambda E)^{k-1} x \neq 0$$

□

Корневые векторы x и их линейные комбинации.

Ор. Множество всех корневых векторов оператора A с собственным λ и их линейные комбинации.

$$W(\lambda) = \{x \in V \mid (A - \lambda E)^k x = 0 \text{ для некоего } k\}$$

Пример

Пусть оператор φ порождает матрицу A .
 Собственные векторы v_i и собственные значения λ_i удовлетворяют:

$$\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$$

Теорема (о разложении линейного оператора) (теорема)

Если A — линейный оператор на V , то V разлагается в прямую сумму его инвариантных подпространств V_i , где $V_i = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$, $\dim V_i = m_i$.

Следствие

Для любого линейного оператора A на V найдутся базисные векторы v_i такие, что матрица оператора A в этом базисе имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{pmatrix}$$

§2. Матрица оператора

Вспомогательная матрица $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$ (1)

каждый из них имеет порядок k , если $e_j \cdot \lambda$.

Характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

$$(A - \lambda E)x = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} x = 0$$

равен нулю $k-1$, т.к. число ненулевых строк $= k-1$ (по определению), тогда характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k-1} \dots (\lambda - \lambda_n)$.
 $\dim V(\lambda) = 1$ — размерность собственного подпространства.

Разложение матрицы (1)

Пусть $v_1, \dots, v_k$ — собственные векторы A с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Тогда $A v_i = \lambda_i v_i$.
 Если $v_1, \dots, v_k$ — базис V , то $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$.

$$(A - \lambda E)v_1 = 0 \Rightarrow (A - \lambda E)v_2 = v_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow (A - \lambda E)^{k-1}v_k = v_{k-1} = 0$$

т.е. v_1 — собственный вектор A с собственным значением λ .
 $v_2, \dots, v_k$ — векторы V , такие что $(A - \lambda E)v_i = v_{i-1}$.

Опр. корреляция λ $A(\lambda)$, отв соединяет λ :

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} [J_{1,1}(\lambda)] & [J_{1,2}(\lambda)] \\ [J_{2,1}(\lambda)] & [J_{2,2}(\lambda)] \end{pmatrix}$$

каждый блок блок-диагонален матрица есть корреляция
 $i_1, \dots, i_s = m$ или кратность λ
 s или кратность λ

Пример

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$$

 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ или $\text{кр} = 3$
 или кр близится к $1, 2$ или 3

Пример $\Gamma \cdot \text{кр} = 1$, матр канонический тип в базисе у соедин
 матр близится

$$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

 здесь два нулевых близится
 $\text{rk}(A - 2E) = 2$

Пример $\Gamma \cdot \text{кр} = 2$

$$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

 здесь одно нулевое близится
 $\text{rk}(A - 2E) = 1$

Пример $\Gamma \cdot \text{кр} = 3$

$$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

 $\text{rk}(A - 2E) = 0$

Пример о корреляция свойств по разб
 Пример A - мат оператор в каноническом пр-ве V , $\dim V = n$;

$$\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda_1)^{m_1} \cdot (1 - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (1 - \lambda_p)^{m_p}$$

 $m_1 + \dots + m_p = n$
 Пример в пр-ве V есть базис , составленный из соедин и нулевых
 векторов , в котором матрица оператора имеет форму

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} [A(\lambda_1)] & [A(\lambda_2)] & \dots & [A(\lambda_p)] \end{pmatrix}$$

 где $A(\lambda_i)$ - корреляция блока ,
 соедин соедин му λ_i

$$J_A = T^{-1} A T$$

Опр. Базис , в котором матрица имеет корреляция форму , наз
 корреляционным базисом

Зб. Функции от матрицы каноническая
 Пример $f(t)$ - матрица : $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$
 Матрица от матрицы : $f(A) = a_0 \cdot E + a_1 A + \dots + a_n A^n$

$J_\lambda = T^{-1} A T \Rightarrow A = T J_\lambda T^{-1}$
 $A^2 = T J_\lambda T^{-1} T J_\lambda T^{-1} = T J_\lambda^2 T^{-1} \Rightarrow A^m = T J_\lambda^m T^{-1}$
 Пример $e^{t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

Пример от матрицы

$$e^X = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots$$

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

 Пример или матрица свойств (группы)
 $X = AX \Rightarrow X(t) = C \cdot e^{At}$

Выписные при от морфизмов кривых

Пусть дан морфизм $f: X \rightarrow Y$ и при $f(x)$ бесконечно дифференцируема.

$$J_n(x) = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

Положим $f(x) = f(J_n(x))$ и имеем:

$$f(J_n(x)) = \begin{pmatrix} f(x) & f'(x) & \dots & f^{(n)}(x) \\ 0 & f'(x) & \dots & f^{(n)}(x) \\ \vdots & f'(x) & \dots & f^{(n)}(x) \\ 0 & f'(x) & \dots & f^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

Умножив матрицу на $f'(x)$:

$$f(A) = T f(J_n(x)) T^{-1}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{pmatrix} \quad f(J) = \begin{pmatrix} f(J_1) \\ f(J_2) \\ \vdots \\ f(J_n) \end{pmatrix}$$

Глава 5. Геометрия векторных пространств

В линейном (векторном) пространстве есть множество, состоящее из элементов, таких как функции и векторы. Сложение со скалярными множителями.

§1. Векторные пространства. Пер-ба. Каноническая базисная система.

Векторное пространство V над полем R или C .

Опр. Векторное пространство V над полем R или C — это множество элементов, удовлетворяющее условиям: